深い学びのための数学的活動
― 多角形の角の和に関する考察より ―

教科教育高度化分野（15220903）蕪　木　茉　莉　奈

中学校数学科において，「深い学び」に至る学習過程はどうあるべきかを検討する必要がある。本研究では筆者が学習者となり数学的実践を行った。その実践過程を振り返り，分析・考察を行うことによって，深い学びのための思考の様相や学習過程の様相を明らかにすることができた。

［キーワード］　中学校数学，反省的思考，発展的，深い学び，図形

１　はじめに

(1)問題の所在と研究の背景

現在，「主体的・対話的で深い学び」つまり「アクティブ・ラーニング」の視点から，学習の質の改善が国をあげて求められている。

実際行われている授業では，対話をする機会や場を多く設けることが積極的に行われているが，意見交換や，答えの確認が目的となっていることが多く，肝心の深い学びにまで到達していないことも多い。生徒の実態を見ると，学習したことを活用したり，自ら発展させて考えていく力が依然として重要な課題となっている。これは授業が深い学びにまで到達していないことを物語っている。だとすれば「深い学び」に至る学習過程はどうあるべきかを検討する必要がある。

(2)研究の目的と方法

中学校学習指導要領数学編では，数学を指導する上で，手続きや知識を伝達するだけではなく，数学をする態度を育てることや数学(数学的活動)すること自体が目標となっている。杉山(1976)は，数学を教える上で教師は，どのように数学をするべきかという規範を生徒に示さなければならないことを述べている。教師自身がよりよく「数学する」ことができなければ生徒に数学をする規範を示すことができないだろう。

ところがこれまでの筆者は，ただ教科書の内容を理解し，教科書の内容を分かりやすく伝達するためにはと指導の策を練ることに留まってしまっていた。数学において教材研究とは，指導者も学習者となり自ら数学し，粘り強く考え続けていくことだと考える。

本研究では，深い学びにつながる数学的活動をすることは一体何をすることなのかを明らかにし，自身の授業づくりを改善することを目的とする。

本研究では筆者自身が学習者となり数学を自ら発展させることを試みた。その数学的実践を反省的に，分析，考察を行い，そこから深い学びの学習過程を明らかにする。

２　深い学びに関する基礎的考察

数学科の授業でも，主体的で対話的な活動によって深い学びが実現されなければならない。目指すべき深い学びとは何か。

次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめによれば，算数・数学科における深い学びは，「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，新たな知識・技能を身に付けてそれらを統合し，思考，態度が変容すること」とある。数学的な見方・考え方とは「事象を数量や図形及びそれらの関係などに注目して捉え，論理的・統合的・発展的に考えること」と定義されている。

次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめにおいて，問題解決の過程には次の２つのサイクルがあることが示されている(図１)。

①日常生活や社会の事象を数理的に捉え，数学的に問題を表現・処理し，問題を解決し，解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する

②数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し，数学的に処理し，問題を解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする。

どちらのサイクルにおいても，解決過程を振り返っている。そこから考察・統合・発展・体系化を行い，学習者は日常生活における新たな知恵や，

新たな数学の事象を認識することになる。つまり，解決過程を振り返ることは，数学を発展させ新たに数学をつくっていく過程となっていると言える。この新しくつくられた数学からまた課題を見つけ，①②のような問題解決過程のサイクルが行われる。よって，このサイクルは繰り返し行われるべきであり，回っていくものという認識を持たなければならない。問題が解決されて終わりなのではなく，そこから新たな数学をつくりだすことまでを含め，深い学びのための数学が実現すると捉えられる。

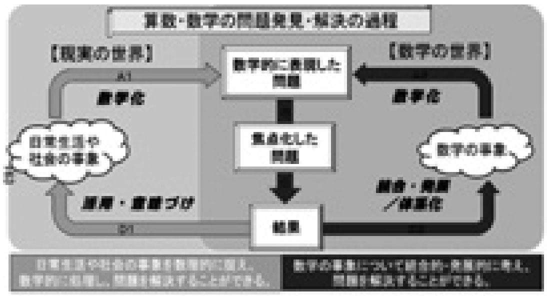


図 1.

数学を学習することは活動そのものである。また数学する活動は回り続けているものでなければならない。活動の上での学習者の思考様相について考えると，問いが連続すること，解決したことから新たな課題が生まれること，つまり思考が連続していなければならないと考える。深い学びの実現のための授業は，学習内容，学習活動が体系化されたものとなっており，思考が連続していることである。

しかし実際は，生徒は与えられた活動や問題をただこなしているだけで，それらのつながりを見出すことは難しい。授業の進行も，問題を解決し，結果を得ることにとどまり，問題解決サイクルが回っているとは言いがたい。言い方を変えれば，得られた結果から数学を発展させることを生徒自らが行うことはもちろん，教師が授業で行っていくことも難しいのである。教師が，問いが連続するようにつながりを見出し，そのつながりを生徒に見せ，思考の連続性を保証していかなければ，生徒に数学がセクションごとに分断されたものと認識されてしまう。

教師の役割は，数学の教える内容にストーリー性を持たせ，そのストーリーを生徒と一緒に辿っていく，つくっていくことだと考える。また，そのストーリーにおいて数学を発展させるための手がかりも生徒に示すべきである。それを行わない限りは，いくら話し合う活動を設けたところで数学をすることを生徒に伝えられないと考える。

3　教師としての数学的実践

(1) 実践した題材について

①教科書での扱い

本研究において筆者は中学校第 2 学年の多角形の内角・外角の和に関して考察を行った。生徒たちは小学校算数で既に多角形を学習している。東京書籍「新しい算数」によると，小学校算数で学習する多角形の定義は,「三角形, 四角形, 五角形, 六角形などのように，直線で囲まれた図形」となっている。つまり直線に囲まれた領域ということで多角形は定義されていると考えることができる。また，角については，「1 つの頂点から出ている 2 つの辺がつくる形」と定義されている。

その定義の上で中学校では多角形の内角の和を学習する。角の和に関する推論は，すべての教科書において，内角から進められている。多角形を三角形や四角形に分割し，内角の和を求め，n 角形の場合を帰納的に考え，内角の和を 180(n−2)と予想し，演繹的に確かめている。その後，多角形の内角の和が 180(n−2)になることを認めた上で，外角の和を求めている。多角形の頂点の数に対応して内角と外角の和である 180 度が存在するので，180×頂点の数から内角の和を引いて外角の和を求める。n 角形の場合も同様に，n 個 180 度が存在するので，180×n から内角の和 180(n−2)を引くと 360 度という値がでる。このことをもって多角形の外角の和について学習する。

②外角の和を直観的に理解すること

三角形の内角の和が 180 度になることは，平行線の同位角，錯角などの関係から演繹的に証明される。この活動は証明の学習の重要な先駆けとなる。演繹的な証明をもって三角形の内角の和が 180 度となることは明らかにされたが，生徒たちはこれで三角形の内角の和がいつでも 180 度となるということを納得しているのだろうか。

中島(2015)は，三角形の内角の和がこのように実証されたとしても生徒たちに疑問が残らないわけではないことを指摘している。彼は，「『ほんとうにわかった！！』といえるのは，自分にとってより根本的な，自分の知識や経験では疑う余地のないことがらをもとにして，説明できたときであろう。」と述べており，三角形の外角の和を一周の

方向転換の視点で考えることを疑う余地のない説明の例として挙げている。また，このような例によって三角形の外角，内角の和の値を求めていくことは，演繹的な推論や証明の意義をまだ学習していない生徒にとってより認めやすいこととなると述べ,『ほんとうにすっきりした！！』と感じるところまで考えることのできる生徒を育てることを推奨している。

教科書では内角と外角の和が 180 度になることを使って，180 度から内角を引いた部分を外角であると推論して外角の和が求められているが，外角の和が 360 度であることを直観的に認めることも可能である。多角形の外角の和が 360 度になることを直観的に認める学習活動はいくつかの教科書でも取り上げられている。多角形の辺上に鉛筆を置き，辺に沿って鉛筆を動かしていく。頂点の部分で鉛筆は何度回転しているのかは，多角形のその頂点における外角の角度を表しており，多角形を一周させると鉛筆は何度回転したことになるのかを考えると，丁度 1 回転(360 度) していることがわかる。この活動によって多角形の外角の和が 360 度になることを直観的に理解できる。また,別の活動が載っている教科書もある。それは，地面に多角形を描き，その辺の上を歩き頂点でそれぞれ向きを変えて進み多角形を一周するという活動である。この活動も鉛筆の活動と同様，多角形の辺に沿って多角形の周りを一周することで外角の和を直観的に理解させようとしている。

以上のような先行研究の流れから，一般では内角の和から外角の和という順序で推論が進められている。これに対し,「外角の和から内角の和を求めることができるだろうか？」という問いのもと考察を行った。また，今年度見学した授業で星形多角形を扱っているものがあった。見学した授業では，星形多角形の先端の角の和を求める求め方を，図形の種類ごとに分かれて話し合う内容であった。この点から，星形多角形にも同じような考察を用いることができないか考えた。

⑵多角形の角の和に関する考察

①多角形の角の和を求める

多角形の内角の和を，外角の和から求めるために，まず多角形の外角の和が 360 度になることを認めなければならない。外角を，多角形の辺を延長した直線に沿ってできる外側の角とし，多角形を折れ線がつくる図形と見たときに，閉じていることをもって多角形の外角の和は 360 度になることを同時に認めるよう定義した。

三角形の外角の和が 360 度になることを，推論を用いず直観的に認めた後に, 内角の和を求める。三角形は，1 つの角あたりに。180 度が 1 つできると見ることができる。これも図形を見て直観的に認められることである。内角＋外角＝180 度であることを知っていると, 内角の和＋外角の和＝180×3 という式ができ，内角の和＝180×3－360 で求められる。ここでは，内角の和は，540－360＝180 で，180 度になることがわかる(図 2)。

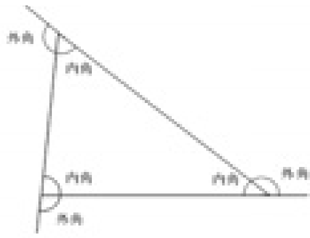


図 2.

四角形，五角形と角の数を増やしていき，ｎ角形の内角の和を求める。

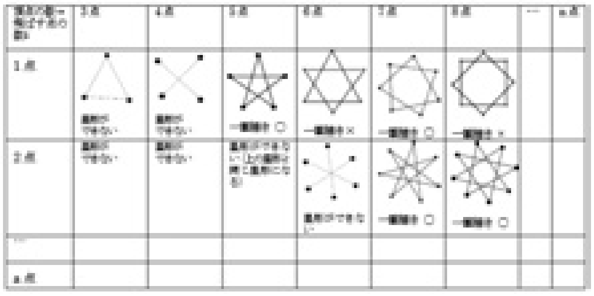
ｎ角形の場合	外角の和は 360 度，180 度はｎ個あるので，内角の和＋360 度＝180 ×ｎより，内角の和は 180×ｎ－ 360 になる。

このように，三角形の内角の和が 180 度ということを知らなくても多角形の内角の和を求めることができる。ｎ角形の場合でも直観的に認められることだけを使って推論し，内角の和を導くことができる。

②(ⅰ)星形について

内角の和を外角の和から導くことはできないかという同じ推論を星形でも考える。まず学習者は星形をイメージするために，星形をかいてみるだろう。イメージしやすいのは，角が 5 つ出ている星形である。ここでは星形 5 角形と呼ぶとする。「違う星形もあるのだろうか？」という問いのもと，他の星形も作図することを試みる。星形がうまく作図できない失敗を経験したり，簡単にかけた星形 5 角形の形を観察することや描き方を振り返ったりする段階を経て，点の数と点の結び方によってできる星形が決まること，星形の中には一筆描きできるものとできないものがあることがわかる。以上のことより，星形多角形を次のように整理できる(表 1)。ここより星形を，頂点の数と点の結び方により区別して考えていくことにする。

表1. 星形多角形の分類(一部)



（ⅱ）星形の角の和について

星形を以上のように整理した上で，外角・内角の和についての推論を行う。
星形5角形で考えると，図の部分を星形五角形の先端内角(※本研究ではそう呼ぶことにする)としたとき，先端外角(※)は次の5か所になるとみることができる(図3)。この5か所の角の和から考える。外角の和は2回転しているから720度である。定規を回して確かめることが可能である。

星形ではない多角形は外角が一定だったので，「同じように考えて星形の多角形も先端外角が一定になるのではないか？」という予想が立てられる。更に，「先端外角の和が点の結び方によって一定であれば，先端内角の和はｎの式に一般化できるのではないか」という予想もできる。具体的には，1点とばしの星形ｎ角形の先端外角が720度(180×4)であることから先端内角の和は，180(n-4)で求められるという予想となる。

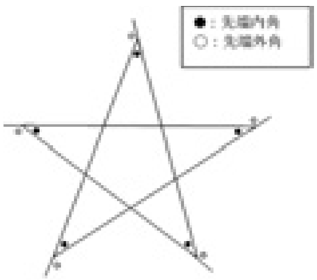


図3.

先ほどの予想の妥当性を明らかにするために，どうして1点飛ばしでできる多角形の外角は720度で一定なのだろうかという根拠を考える。

構造に注目すると，1点飛ばしの図形は，中に0点飛ばしの多角形ができており，1つの辺に対応して三角形が外側についている構造をしていると見ることができる(図4)。

星形の先端外角の大きさは，先端の三角形の内角（先端の角または，先端以外の2角）の大きさによって決まる。また，三角形の辺は，中の多角形の2つの辺を延長した線でできていることから，三角形の先端の角以外の内角は，中の多角形の外角になっているとみられる。中の多角形の外角の和が三角形の内角に対応している。三角形の両側の内角の和を考えると，外角の和が2つあることがわかるので(図5)，外角の和×2，つまり360度×2で720度になっている。三角形の1つの外角は，それと隣り合わないふたつの内角の和に等しいので先端外角の和も720度になる。

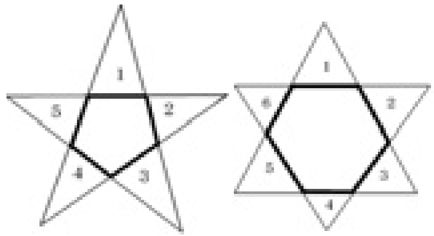


図4.

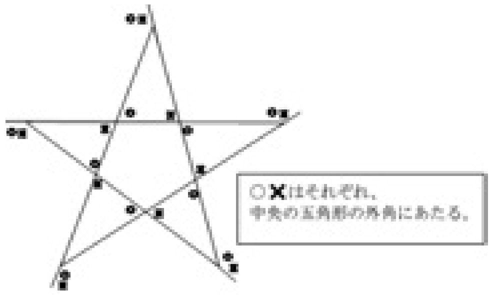


図5.

外角が一定で720度になることを，1点飛ばしでは認められた。ここから，外角の和が180×mで一定ならば，n角形の内角の和は180（ｎ－m）で表すことができることが予想できる。つまり，外角の和がわかれば内角の和もわかるということが星形でも言うことが可能となる。

1点飛ばしでできる星形では外角の和が一定なることが分かったので，次は2点飛ばしでできる星形では外角の和は一定になるのかについて考える。構造に注目すると，2点飛ばしの星形の中には1点飛ばしの星形ができていることが見つけられる。その外側に中央の多角形の内角の対頂角を内角にもつ四角形が，角の数ぶんできている(図6)。角の数ぶん四角形ができるということは，四角形の内角の和が360度×ｎであることが認められる。四角形の先端の角を2つ飛ばし多角形の内角とすると，内角＋中央の多角形の内角の対頂角＋四角形の2つの内角＝360度となる。

四角形の2つの内角は，四角形の内側にある1つ飛ばし多角形の外角とみることができる。先ほど，1つ飛ばし多角形の外角の和は720度である

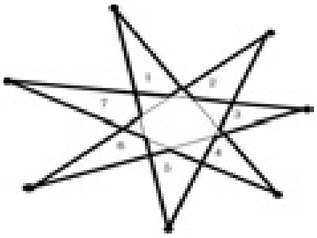


図 6.

と認めた。それが２つあるとみることができるので，720×2＝四角形の２つの内角の和である。したがって，２つ飛ばし多角形の内角の和は，360×ｎ－0 つ飛ばしの内角の和{180 (n-2)}-720×2 という式で求められる。

式変形すると $360n-180(n-2)-720\times 2$

$=360n-180(n-2)-180\times 8$

$=180(2n)-180(n-2)-180(8)$

$=180(n-6)$

内角の和＋外角の和＝180×ｎであるので外角は，180×6 で一定となる。2 点飛ばしでできる多角形の外角も一定と言えそうである。

1 点飛ばしすると中に 0 点飛ばしの図形ができる，2 点飛ばしすると中に 1 点飛ばしの図形ができる。以上のような推論を，3 点飛ばしの時，4 点飛ばしの時，と飛ばす点の数を増やして進めていくと，a 点飛ばしのときは中に a-1 点飛ばしの図形ができると予想することができる。この予想が妥当であることが明らかにできれば，点の結び方によって外角が一定に決まるということがいえるだろう。

③　特別な図形の角の和について

三角形や四角形などといった多角形と，星形の角の和について考えてきたが，同じ四角形の中にも，1 つの角がへこんでいるような四角形や，2 本の直線が交わっている四角形などが存在する。このような図形も四角形と呼べるのか。四角形と呼んだとして，内角と外角の関係は今までと同じように考えていくことができるのか(図 7)。

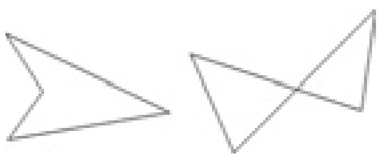


図 7.

定義によって，図形が何多角形か，内角と外角がどこにあたる部分なのかをはっきりさせた後，図形の外角を求めると，凹多角形の中には外角の中に，向きが逆になる角があるということがわかる。外角の和を正確に考えるために，角に正負の向きをつける必要性が出てきた。そこで，先端の外角の向きを正の向きとしたとき，内部の外角の向きを負の向きとして外角の和を考える。外角の和を求めると，360 度になる。

一部分が凹んでいる四角形を凹四角形とみるように，先ほど議論した星形を見直す。先端に 5 つの角がある星形は，凹十角形とみることができ，内角と外角の位置も変わってくる。星形 5 角形とみていた場合，この図形を 5 本の直線によってできる図形とみており，先端の 5 つの角を内角として考えていた。それに対し，凹十角形とみる場合は星形の輪郭に注目する必要があり，内角が 10 個存在することになる(図 8)。

図 8.

凹十角形と見た場合の外角の和を考えてみよう。星形 5 角形と見たときの外角の和は 720 度であった。見方は変わったが，同じ図形であることには変わりはないので，同じく 720 度になるのだろうか。先ほどの推論で星形 5 角形と見た図形を，凹十角形と見た時の外角の和を求めていく。凹十角形と見た場合の外角には，先端の内角の外角も含まれている。つまり，星形 5 角形の外角も含まれているので先端の内角の外角の和は 720 度となる。続いて，十角形の内部にある外角について考える。この 5 つの外角の向きは，先端の角の外角の向きとは逆方向である。内部の外角の位置を見直してみると，中央にある五角形の外角にあたる部分であることに気づく。五角形の外角の和は 360 度である。角に正負の向きをつけて外角の和を考えると，先端の外角＋内部の外角＝720+(−360)=720−360=360 となり，結果，凹十角形の外角の和は 360 度となる。

以上のことから，凹四角形と凹十角形の外角について，次のような予想ができる。凹多角形には凹(凹んでいる部分)が存在するが，凹んでいる部分の外角の向きが逆の向きになっているということ，角に向きという定義を与え，凹の部分の外角を負の向きとすると，輪郭をかたどって図形を認識する場合に限り外角の和が 360 度と統一的にみ

ることができるということである。

４　分析と考察

３で考えてきた数学の実践の過程で，筆者は何を問い，何を考えていたのかを分析する。

(1)数学を発展させている場面

数学的実践から，数学の内容がより進んだ段階に移っていく場面，つまり数学を発展させている場面を取り出してみると，大きく次の 4 つの場面があった。

1	三角形で考えた後，他の図形でも考えようとしている。多角形を一般化しようとしている場面
2	四角形や五角形などの多角形で言えたので，星形でも考えようとしている。図形の範囲を星形にまで拡張している場面
3	点の結び方によって変わる星形の構造を体系化しようとしている場面
4	多角形を凸型と凹型で区別して多角形の範囲を広げて考えようとしている場面

1 から 4 の流れで数学を発展させる過程で筆者は多くの問いや疑問，予想を立てながら推論を行っている。

発展の考えの特徴を考えると，1 から 4 にわたって，三角形，n 角形，星形 n 角形，凹多角形と，だんだん考えている図形の範囲が拡張されていることがわかる。ひとつの図形の内角の和，外角の和でとどまらず，図形の範囲を広げて，なるべく多くの種類の多角形の場合でどうなるのかを明らかにしようとして推論が進められていると考えることができる。また，筆者はこの実践を行う上で，図形の範囲を拡張し，なるべく広い範囲で角の和の関係を一般化や体系化したいという狙いを持っていた。この狙いがなければここまで図形の範囲を拡張して考えようとはしなかっただろう。よって，発展の契機は統合化，体系化したいという願いがあるから訪れると言うことができそうだ。

(2)帰納的手続きと作図

数学を発展させていく過程で，どのような思考や推論が行われているのか。ポリア(1959)は，著書「帰納と類比」の中で，数学の研究の中では帰納的手続きの例が多く見出されることを述べている。帰納的手続きは一般に次のように展開されていく。

①ひとつの推測を考えつく
②真であるか誤りであるかを見出そうとつとめる
③さらに多くの特別な場合を調べた
④調べられたすべての例について結局推測が真であることが明らかになった
⑤推測に対するわれわれの信頼がました

帰納的手続きには，第一段階として観察や実験を通した事実に基づいて事象を予想する「暗示的接触」，第二段階に予想したことをよく調べ，意味を明瞭につかもうとする「支持的接触」がある。予想した事象が真であることの一般性は示すことにはなっていないが，暗示的接触から支持的接触を経て推測が真なのではないかという信頼性が増していく。

今回の実践を振り返ると，この暗示的接触と支持的接触が多く行われていることがわかった。筆者はこの実践をするにあたり何度も図形を作図した。主に星形の作図である。作図の目的は，星形にきまりが見いだせないか，形が共通となる条件や，きまりを発見することであった。つまり，暗示的接触を行うために行っていた作図と考えることができよう。多くの作図の経験から，筆者は点の数によってできる星形がかわること，点の数が同じでも点の結び方(点の飛ばし方)のよってできる星形が変わることを予想している。その予想した事象が本当に正しいか，また再び様々な点の数と点の飛ばし方で星形を作図している。これは支持的接触を行う姿とみることができる。この例のような姿は他にも多くの場面で見ることができる。よって，数学を発展させる過程において，暗示的接触と支持的接触は何度も行われていると考えることができる。またここでは暗示的接触や支持的接触の過程において，作図することが大きく関わっている。暗示的接触や支持的接触が，作図の目的となっており，作図する必要感をもたらしていると考えることもできる。

(3)数学的推論の視点

筆者の思考では，帰納的な推論，類比的な推論，演繹的な推論の数学的推論を何度も繰り返しながら数学を発展させている。数学の発展と数学的推論がどう関わっているのかを分析する。

数学を発展させる際には，「発見した性質から事象を一般化するとこうなりそうだ」「考えた図形と同じように考えるとこのような予想ができる」というような帰納的な推論や類比的な推論が使われていることがわかる。帰納的推論と類比的推論の違いは，帰納的推論が事象の一般性を推論していることに対し，類比的推論は 2 つ以上の異なるものに類似性を見出し同じとみることである。

例えば，「三角形四角形のような多角形の外角の和が一定であったことから，星形多角形でも外角の和が一定にならないか。」の予想がたてられたあと，予想が成り立つと仮定して星形 n 角形の場合

の内角の和を帰納的に推論していることが実践の中で見られた。帰納的推論や類比的推論によって予想されたことは，演繹的な推論によって妥当性，一般性が保証される。しかし，この事例は演繹的推論が使われることなく予想が連鎖している例とみることができる。よって，予想したことをすぐ演繹的に示すというパターンだけではなく，予想が連鎖しながら，また時にはその予想が脱線しながら数学がひろがり，発展していくと考えることができる。

(4)見方を変えることと振り返ることの重要性

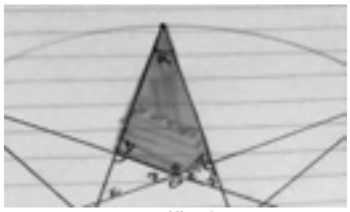
筆者は，推論を進めていくにあたって問題を解決するために何を考えたらよいのかがわからなくなり，思考が行き詰まることに遭遇した。数学を発展させる場合に限らず，目の前の問題を解決するためにどうすればよいのかわからなくなり思考が停止してしまうということは学習者にはよくあることである。今回の実践を行うことによって，考えが行き詰り，推論が進まないという状況のときにどのようなことが突破口となったのかという示唆を得ることができた。筆者がまず行き詰ったのは１点飛ばし星形５角形の先端の内角の外角の和について演繹的に推論するために図形の構造を考える場面である。思考の様相は次の通りである。

・先端外角と隣り合わない２つの内角に注目してみよう。
・やっぱりわからない。
・見方を変えられないか。
・見方を変えると，三角形の先端の外角に隣り合わない二つの内角はそれぞれ五角形の内角だ。
・五角形の外角が２つということになるから，360×2＝720 で 720 度。
・図形の構造からも演繹的に 720 度になるということができた。

筆者は三角形の２つの内角について，見方を変えることで行き詰まりを突破している。ひとつのものを，２面で見ることによって図形の構造が明らかとなった。このように，事象を多面的に見る見方も問題解決において重要となることがわかる。また，ひとつのものを多面的に見ることに難しさがあるということもこの事例から示唆された。

次に筆者が行き詰ったのは，２点飛ばし星形７角形の構造を考えている場面である。今回も先端の外角を考えたいので，外角は何によって変わるのかということを考える。しかし先端の外角は四角形の外角なので，三角形の外角と内角の性質は使えない。よって先端の外角を考える前に先端の内角を考える対象として推論を進めることになった。次の記録は，２点飛ばし星形の先端に７つできる四角形に特に注目した時の思考の様相である。

・四角形の構造に注目してみよう。
・a は求めたい先端の内角である。c は中央の内角の対頂角になっている。b と d は？
・星形５角形のときは何を考えたっけ？
・星形５角形の時は見方を変えることをつかった。
・b と d も見方を変えてみよう。b と d は p と q のそれぞれの外角にあたる。
・p と q は三角形の内角だ。
・ということは，三角形の外角が b と d なんだ。
・つまり，b は三角形の内角 x と y の和だ。d は三角形の内角 x’と y’の和。
・x と y の見方も変えてみよう。
・x と y はそれぞれ，中央の五角形の外角だ。
・ということは，角の和を考えると…推論は続く


ノートに描かれた図

この場面では，四角形の２つの角 b と d が星形７角形のどの部分に関係しているのかを考えており，筆者は先ほどと同様に困難を感じていた。そこで，前の問題解決において困ったときの思考を振り返った。１点飛ばし星形５角形の場合は，行き詰った際，見方を変えていたことを思い出し，同じ試行を角 b と d でも行っている。見方を変えることで，四角形の２つ内角としか見えていなかった角が，ほかの図形の外角であることを見出し，星形７角形の場合も図形の構造を明らかにすることができた。今回の場面では偶然，前回と同じ思考パターンで行き詰まりを突破できたのかもしれないが，問題に行き詰った場面で，同じような問題を思い出しその解決のための思考を振り返ることは重要である。

(5)定義の意味と重要性

学習にあたって定義は，学習の一番はじめに設定されるものであり，その定義を前提として推論は進められる。清水(2007)は，「論証の学習者である生徒は，数学的推論の基礎としての定義の役割とその重要性の認識に基づいて，用語の意味を明確に述べる必要性を認め，よい定義のもつ性質を理解する必要がある。」と述べている。しかし推論が進められる段階においては，まだ定義が何なのか，本当にその定義で良いのかを問う必要がない。よって中学校の学習でも定義の重要性を感じさせる場面がなければ生徒が定義について問うこともないだろう。定義の意味や役割，意義が十分に指導されていないことを指摘している清水(2007)は「そもそもなぜ『定義』が必要なのかなどについ

て，吟味される機会が少ない」と述べている。

今回の実践によって，同じように考えられない図形や，同じように考えたら矛盾が生じたり結論が変わったりする場合に遭遇してはじめて定義を振り返る必要性が出てくるということがわかる。具体的には，四角形や五角形などの多角形の場合では多角形の定義や内角，外角の定義を明らかにしなくても 1 通りに値を求めることができたので，定義について問う必要はなかった。同時に今まで考えてこなかった凹型の多角形が出てきたことにより，凸型の多角形の内角を考えるにあたっては，多角形の定義，内角の定義，外角の定義が曖昧なまま推論が進められていたことに気づく。

しかし，多角形の範囲を，凹が存在するような多角形に広げようとした際，前提や定義をはっきりさせておかないと星形 5 角形と凹 10 角形のときのように結論が変わってしまう。定義は絶対的なものではない。定義によって結果や推論が変わってくるのである。逆を言えば，言いたいことや表したい事柄によって定義は変わるものであるということである。このように定義によって結果が変わってしまう場合を相対的に見せることによっても，学習者は定義をふりかえったり定義が適しているかを考えたりすることを促すことが期待できるだろう。また，定義の意味の正しい認識は「考え方や答えがただ一つとなる」という数学の固いイメージを払拭し，物の見方や考え方に柔軟性を与えることができるだろう。柔軟なものの見方や考え方によって，新たな性質を見つけたり，他の考察ができたりする場合がある。そこからまた新たな問いや課題が生まれ，自ら数学を発展させることに繋がるだろう。

5　おわりに

本研究において，深い学びが実現する数学的活動の様相を明らかにすることができた。深い学びが実現する学習は，2 つある問題解決過程サイクルを繰り返し回し，思考が連続している学習だと言うことができた。問題解決過程のサイクルを繰り返し回すことは，具体的に次のように行われることが実践の振り返りで明らかとなった。

帰納的推論や類比的推論によって予想されたことを，演繹的に推論し妥当性を確かめ新たな事象をつくる。新たにつくった事象を統一的に，発展的に見直していく態度によって，また暗示的接触や指示的接触によってまた帰納的に，類比的に予想が立てられていく。その繰り返しこそが思考過程を回すことである。

筆者の教育実習の授業を振り返ると，予想したことを演繹的に考え，妥当性や一般性を確かめて終わっていることが多かった。思考過程を回すことによる深い学びの実現を目指すためには，そこから分かったことを振り返り，見方を変えてみたり発展させたりして新たな問いを作る活動が必要であることが分かった。

引用文献

G.ポリア(1959)『数学における発見はいかになされるか 1 帰納と類比　柴垣和三雄訳』，丸善株式会社.

文部科学省(2008)『中学校学習指導要領解説　数学編』，教育出版株式会社.

文部科学省(2016)「次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめ(報告)」 http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2016/09/09/1377021_1_1_11_1.pdf (最終閲覧日 2017 年 1 月 29 日).

中島健三(2015)『復刻版.算数・数学教育と数学的な考え方』，東洋館出版社，pp.60-64.

清水美憲(2007)『算数・数学教育における思考指導の方法』，東洋館出版社.

Mathmatical Activities Intended to Promote Deeper Thinking：A Study on the Sum of the Angles of a Polygon

Marina KABUKI